問題

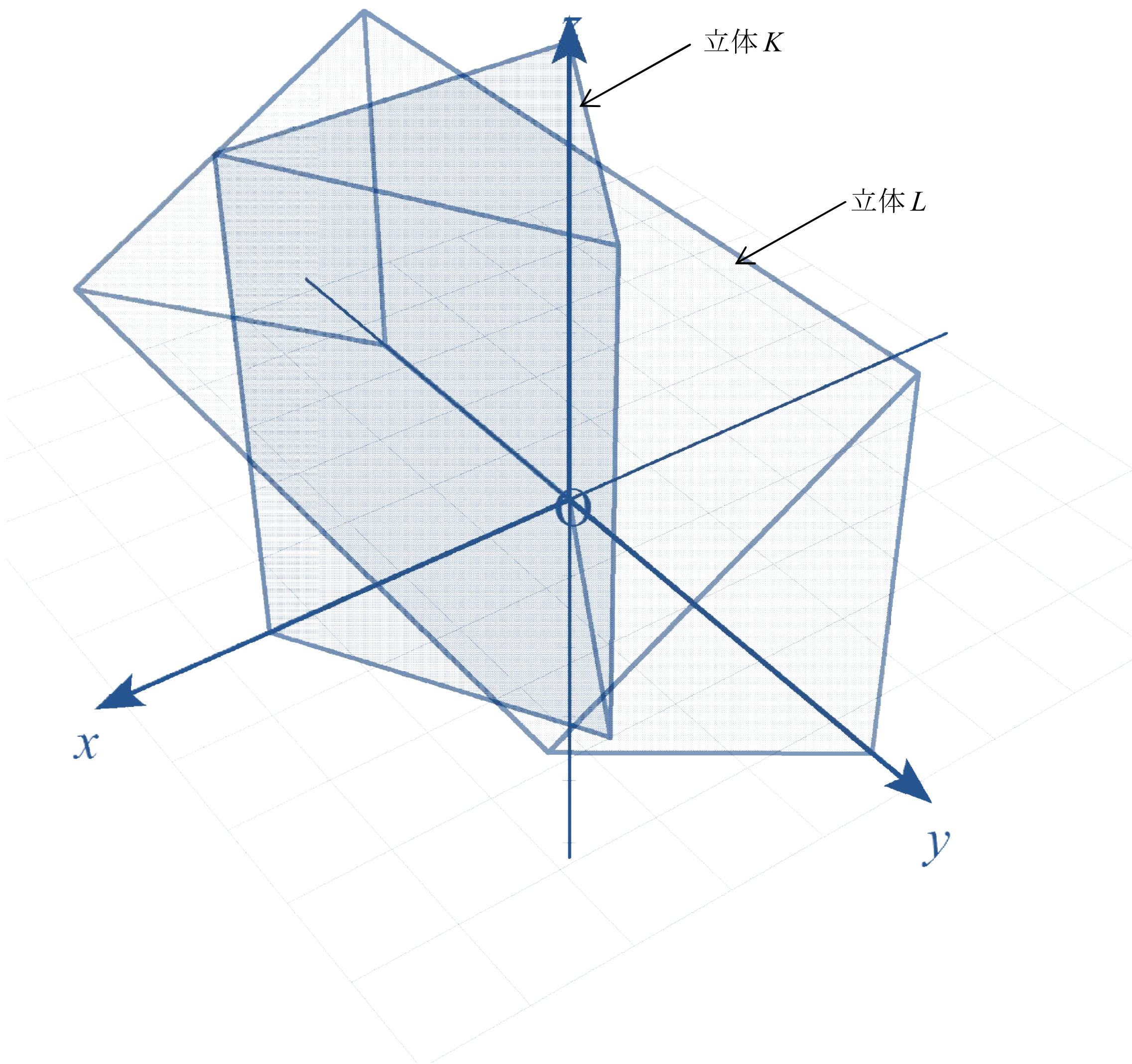
xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。

どのような a に対しても, 平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,0,a)$, $(1,0,a)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},a\right)$ を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,a,0)$， $\left(0,a,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$， $\left(1,a,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。

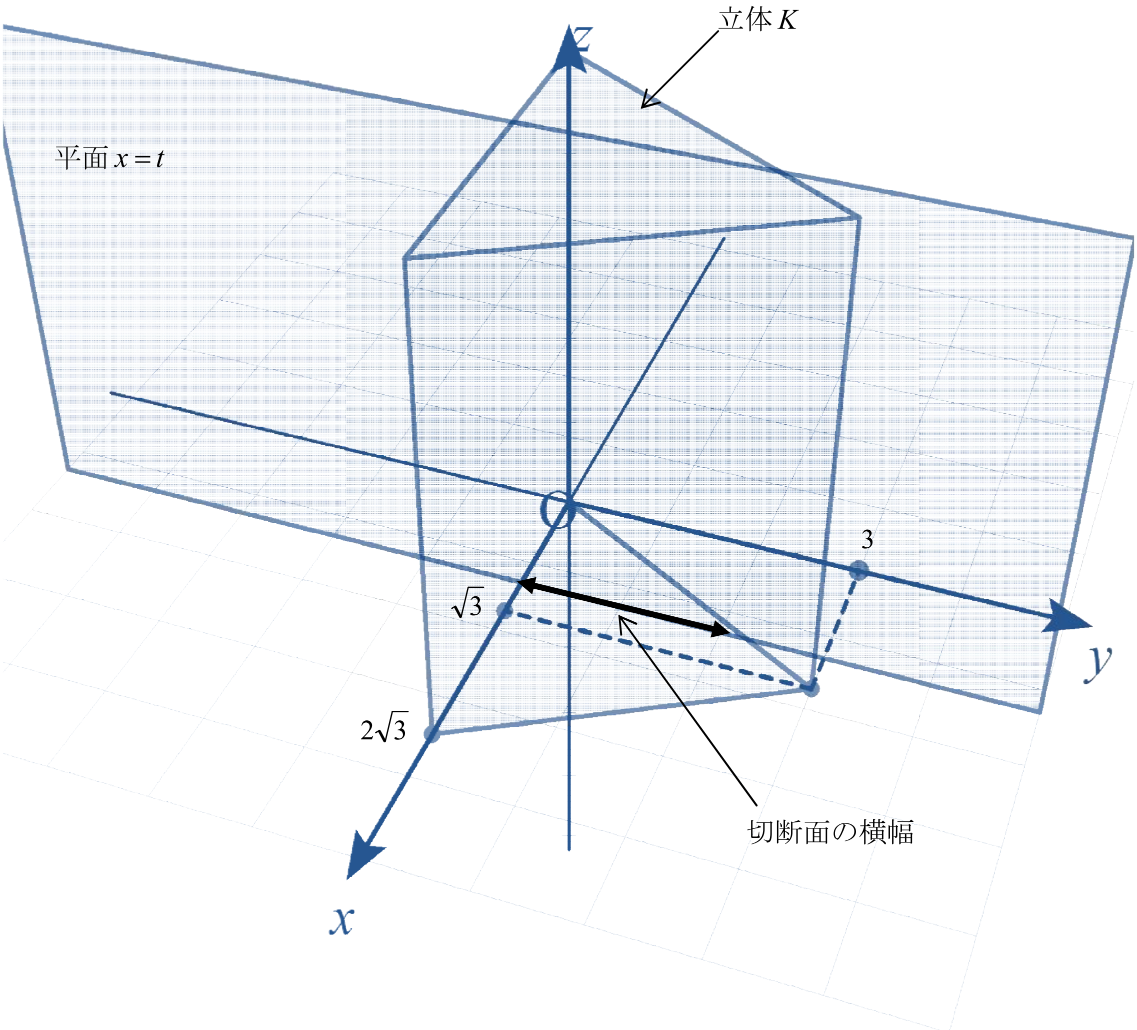
このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

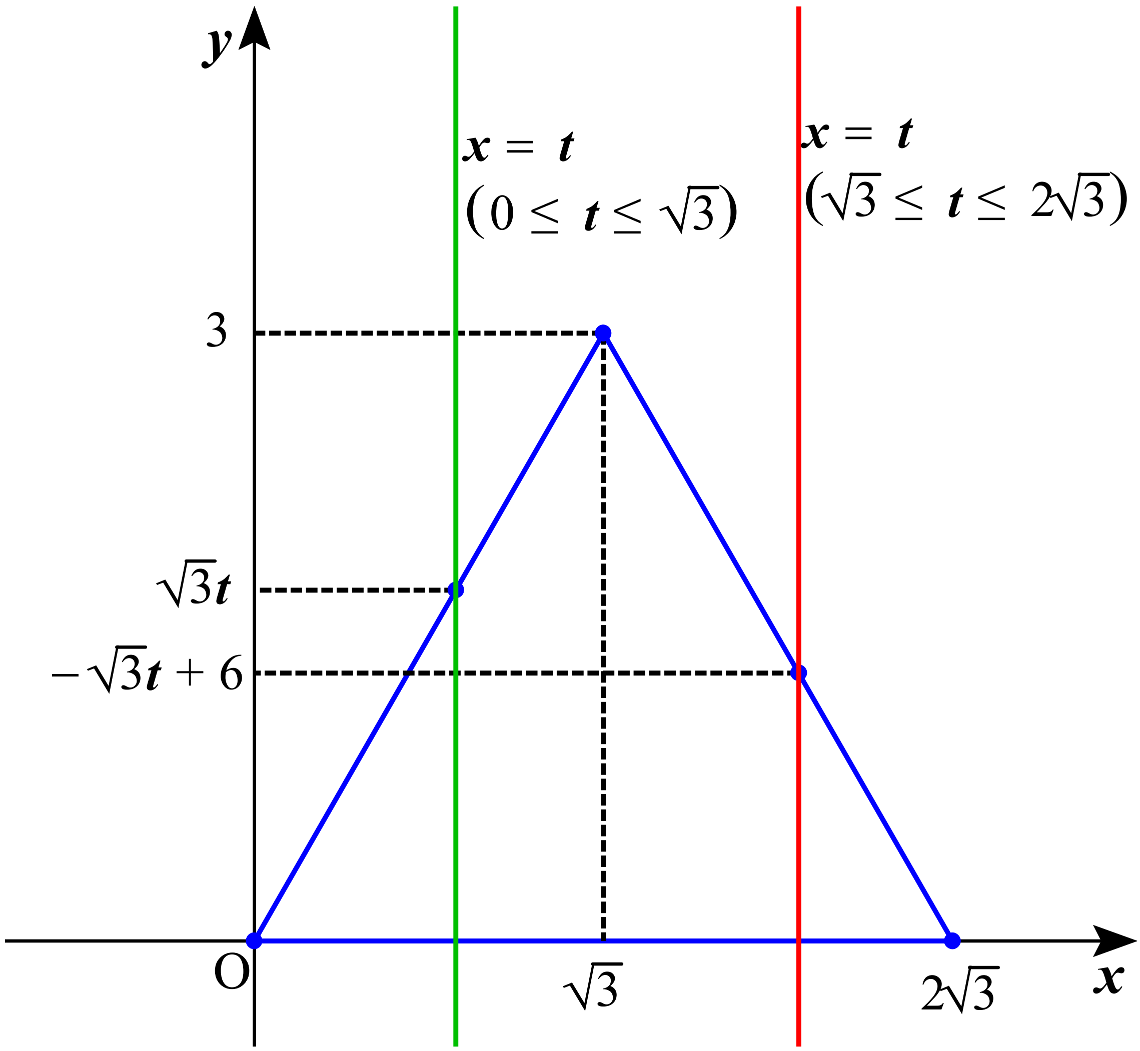
（1999 大阪大学）

解答と解説



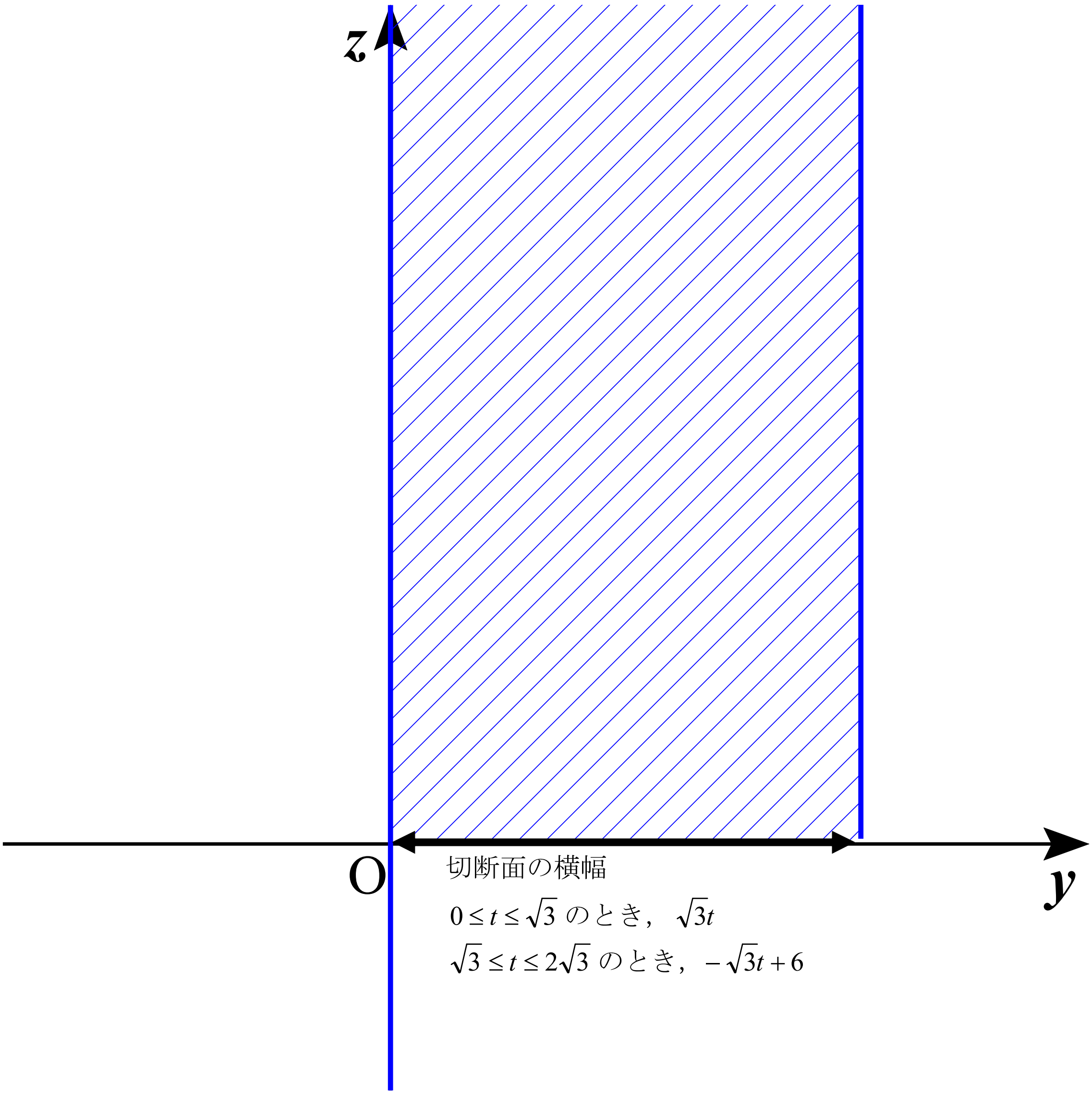
立体 $\boldsymbol{K}$ を平面 $\boldsymbol{x=t}$ で切った切断面について



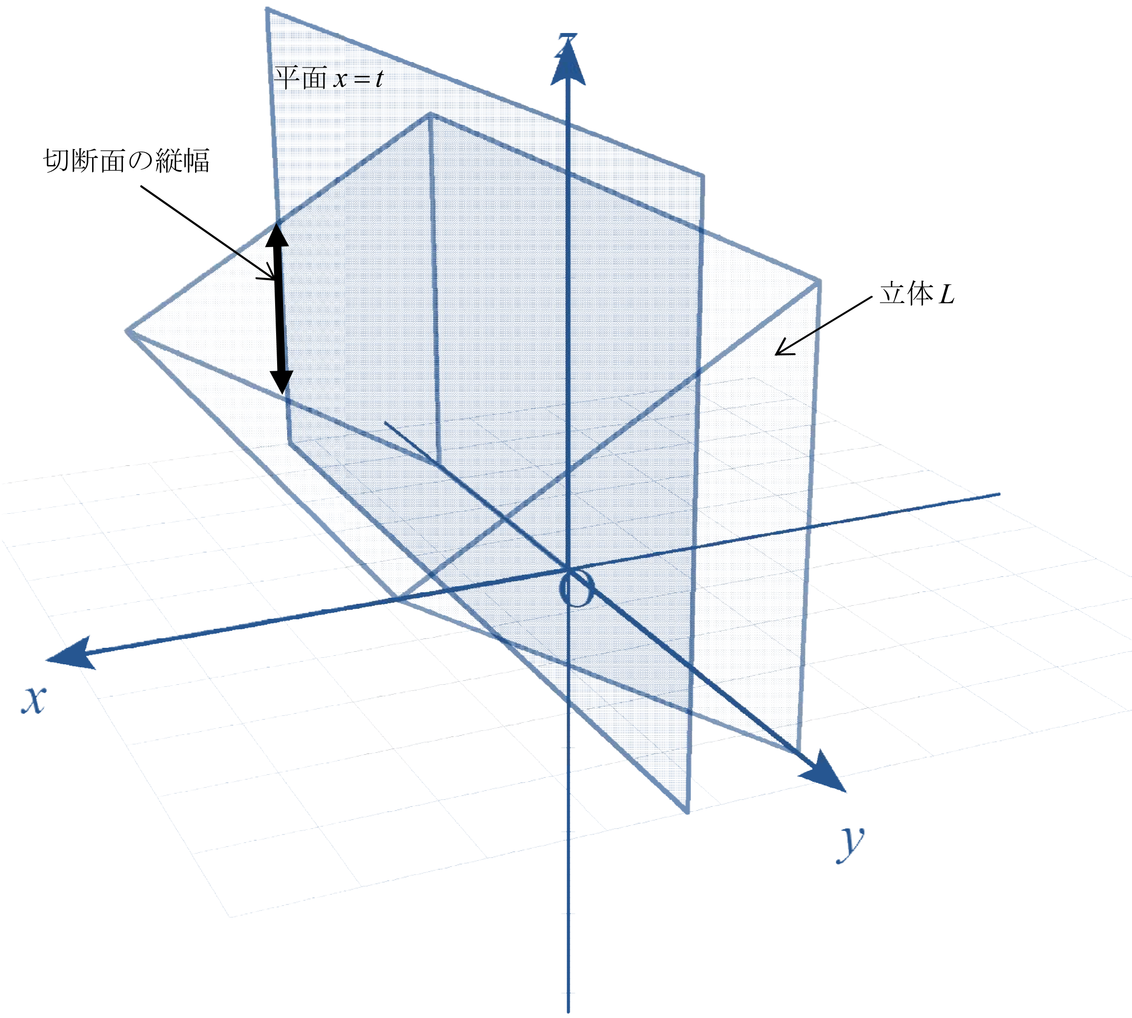


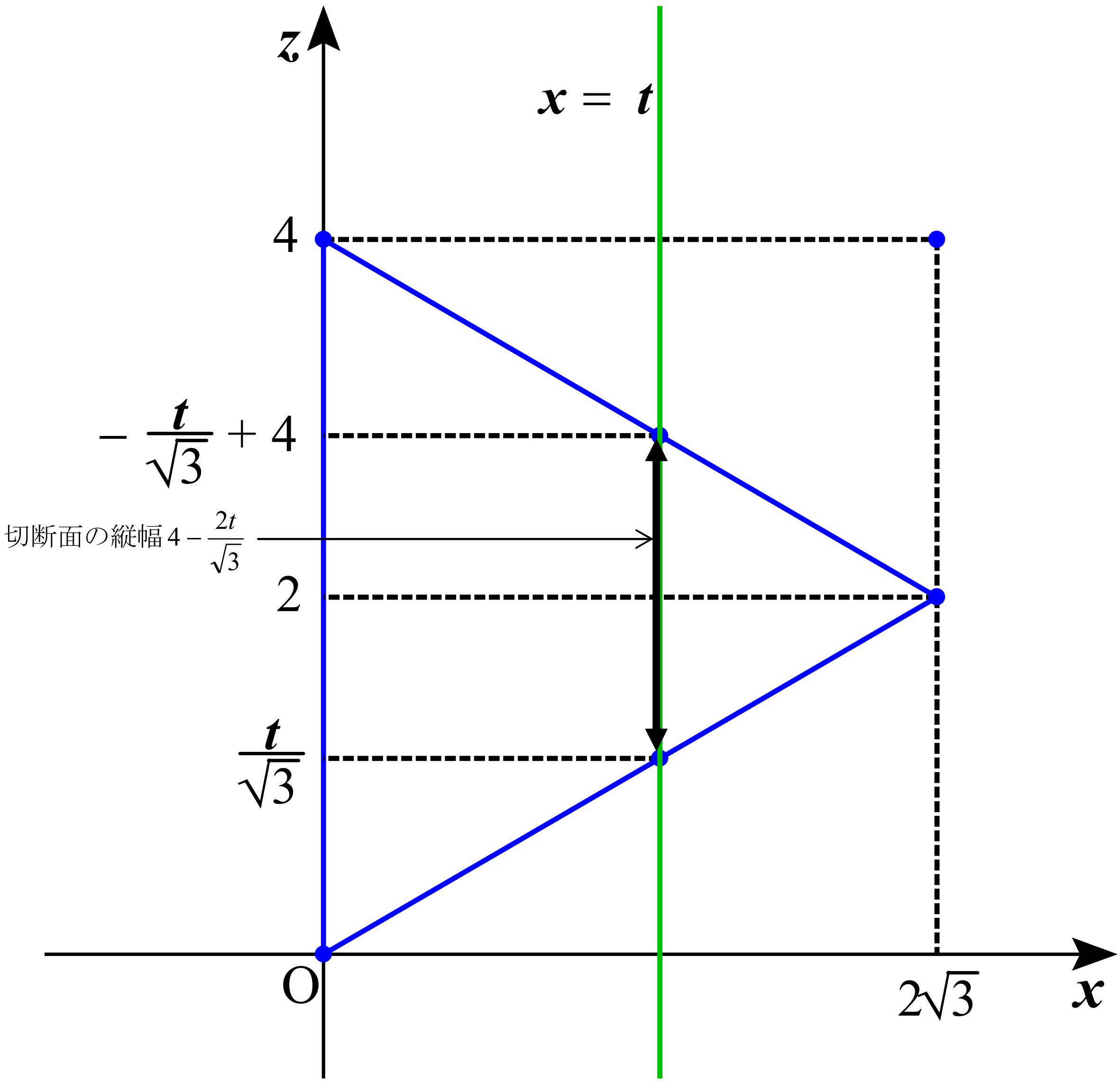
立体 K を平面 $x=t$ （$0 \le t \le \sqrt{3}$）で切ったときの切断面の横幅は $\sqrt{3}t$ で,
立体 K を平面 $x=t$ （$0 \le t \le \sqrt{3}$）で切ったときの切断面の横幅は $-\sqrt{3}t+6$ で表される。

立体 K の平面 $x=t$ による切断面　・・・①



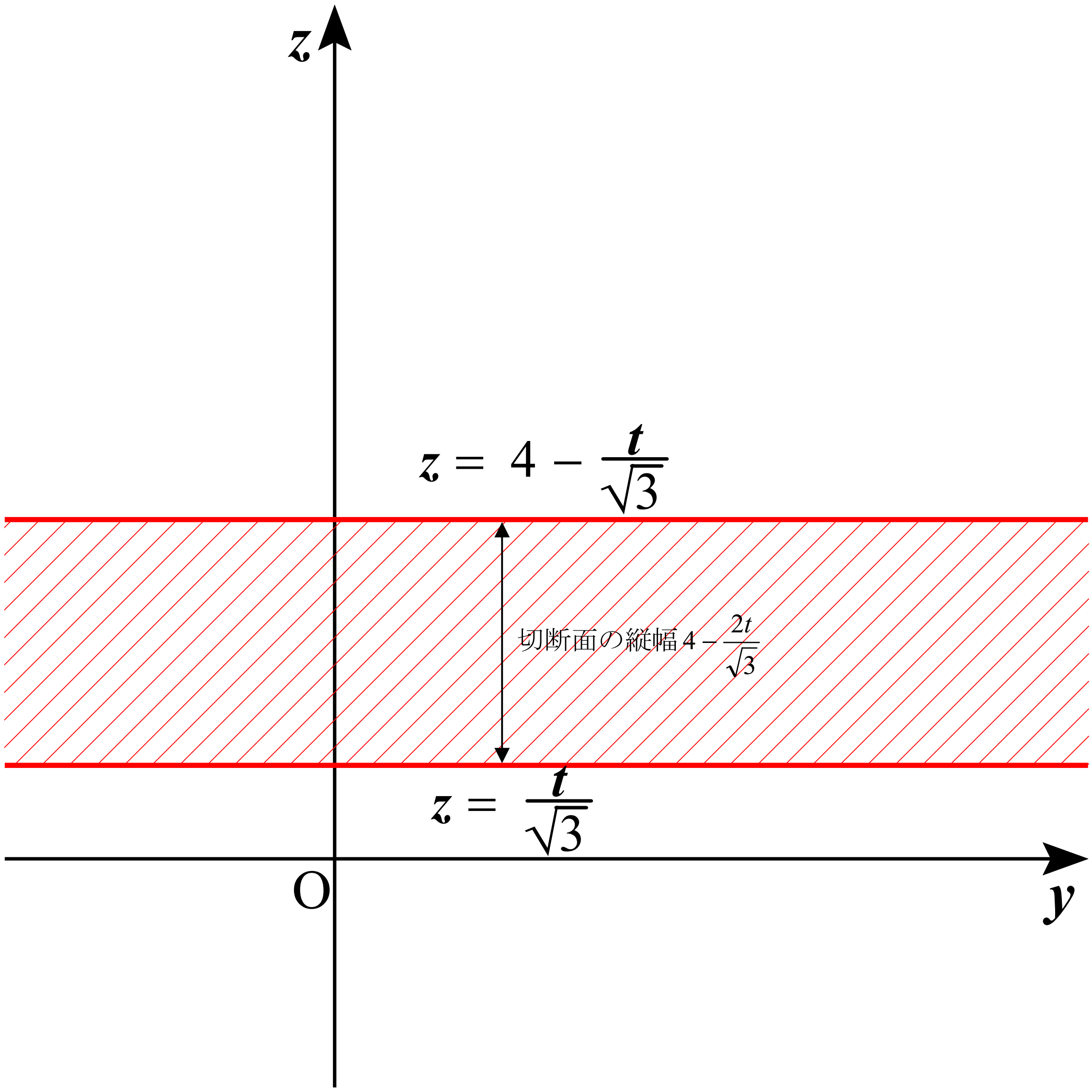
立体 ***L*** を平面 ***x*** **=*t*** で切った切断面について



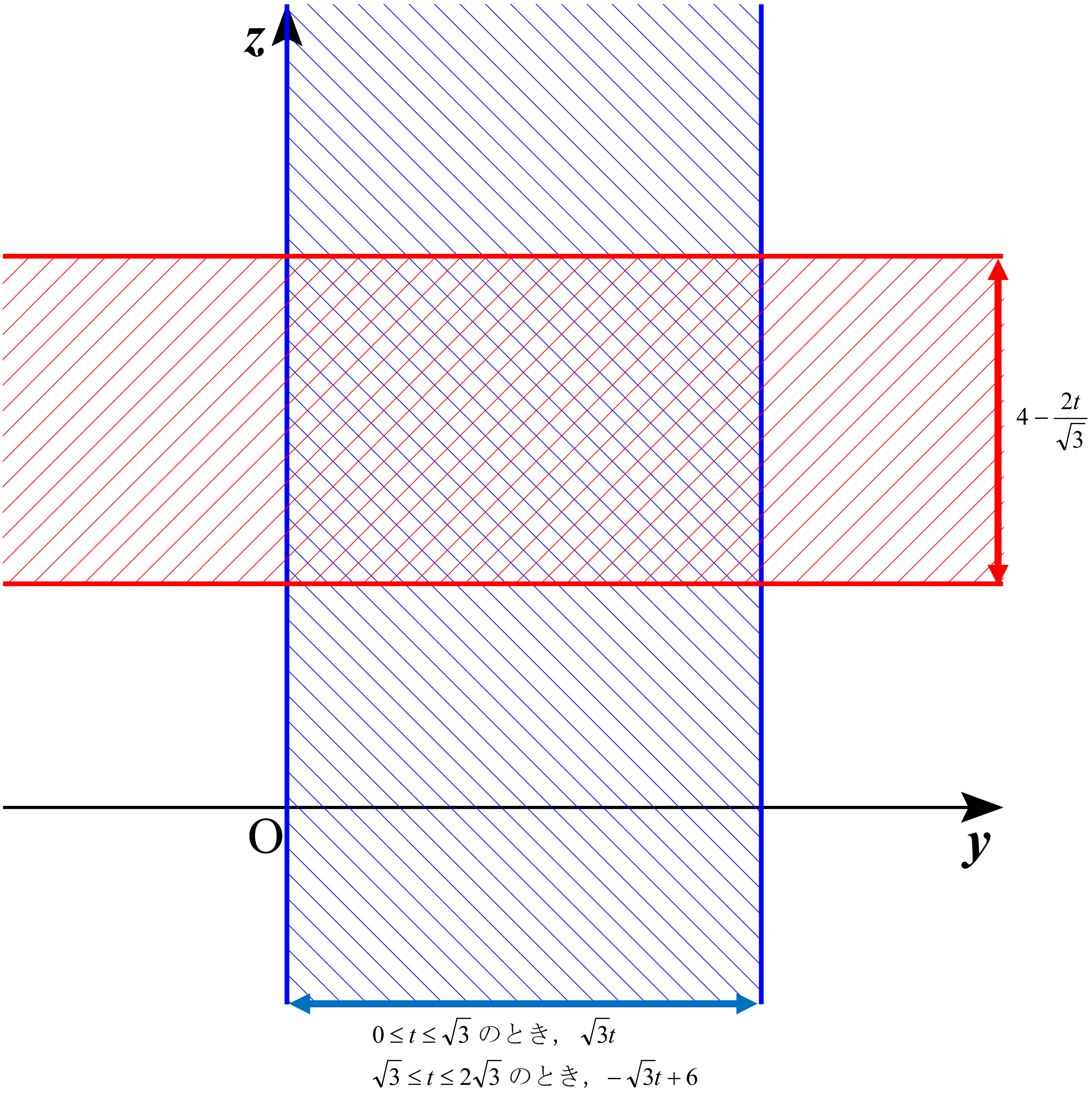


z
x = t
4
$-\dfrac{t}{\sqrt{3}}+4$
切断面の縦幅 $4-\dfrac{2t}{\sqrt{3}}$
2
$\dfrac{t}{\sqrt{3}}$
O
$2\sqrt{3}$
x

立体 L の平面 $x=t$ による切断面　・・・②



切断面①と切断面②を重ね合わせると，



よって，重ね合わさった部分の面積は，

$0 \le t \le \sqrt{3}$ のとき，$\sqrt{3}t\left(4-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)=-2t^2+4\sqrt{3}t=-2\left(t^2-2\sqrt{3}t\right)$

$\sqrt{3} \le t \le 2\sqrt{3}$ のとき，$\left(-\sqrt{3}t+6\right)\left(4-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)=2t^2-8\sqrt{3}t+24=2\left(t-2\sqrt{3}\right)^2$

よって，立体 K と立体 L の共通部分の体積は，

$$\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 2\left(t-2\sqrt{3}\right)^2 dt - \int_0^{\sqrt{3}} 2\left(t^2-2\sqrt{3}t\right)dt = \frac{2}{3}\left[\left(t-2\sqrt{3}\right)^3\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} - 2\left[\frac{1}{3}t^3-\sqrt{3}t^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} - 2\cdot\left(\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$$

$$= 6\sqrt{3} \quad \cdots \text{（答）}$$